Teorema

L'inversa di f continua e iniettiva è continua.

— Fine continuità —

Limiti Notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1 \quad \to \text{F.I. } \frac{0}{0}$$ con cambio di variabile.

- $\arcsin(x) = y \to \sin(y) = x$

[redacted] $x \to 0$, $\sin(y) \to 0$, $y \to 0$

[redacted] $\frac{y}{\sin(y)} = 1$ (è l'inverso di $\frac{\sin x}{x}$)

- $\lim_{x\to 0^+} x^b \log x$, con $b>0 \to$ F.I. $0\cdot\infty$

$= 0$

- $\lim x^b \log x$ ...

Dimostrazione discendono da quelle sulle successioni

$= (0)$

- $\lim_{x \to \infty} x^b \log x, \quad b > 0$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 \qquad \begin{matrix} b > 0 \\ a > 1 \end{matrix}$

- $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x = e^b$

cambio di variabile: $\frac{b}{x} = y \to x = \frac{b}{y}$

quindi $\lim_{y \to 0} (1+y)^{\frac{b}{y}} = \left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^b \to e^b$

- $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Errori

[redacted] $f(\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{e^{x+3}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{e^{\sqrt{2}+3}}$

Non approssimare con numeri!

- $\lim_{x \to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$

Dimostrazione discendono da quelle sulle successioni

- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Infatti $= \dfrac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln(e) = 1$

- $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$

$a^x - 1 = z \qquad a^x = z+1$

$\log_a(a^x) = \log_a(z+1)$ [redacted],

$x \log_a(a) = \log_a(z+1) \to x = \log_a(z+1)$

$\log_a(a^x) = \log_a(x+1)$ [redacted],

$\Leftrightarrow \log_a|x| = \log_a(x+1) \to x = \log(x+1)$

$\log_a(1+x) \sim$ [redacted] $\frac{\ln(1+x)}{\ln(a)}$ $\neq$

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\log_a(1+x)} \to \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\ln(1+x)} \cdot \frac{\ln a}{\ln a}\right) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln a}$ (

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow$ Vicino a 0 l'esponenziale è uguale al polinomio.

$e^x - 1 \sim x \Rightarrow e^x \sim x+1$

- [redacted] $\ln(1+x) \sim x$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Esercizio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+tg(x)} - \sqrt{1-tg(x)}}{\sin(x)} = \frac{0}{0} \text{ FI}$$

↓ moltiplichiamo tutto per le radici e dividiamo

$$\frac{\sqrt{1+tg(x)} - \sqrt{1-tgx}}{\sin(x)} \cdot \frac{\sqrt{1+tgx} + \sqrt{1-tg(x)}}{\sqrt{1+tgx} + \sqrt{1-tgx}} =$$

$$\frac{\left(\sqrt{1+tgx}\right)^2 - \left(\sqrt{1-tgx}\right)^2}{\sin x\left(\sqrt{1+tgx} + \sqrt{1-tgx}\right)} = \frac{1+tgx-1+tgx}{\sin x\left(\sqrt{1+tgx} + \sqrt{1-tgx}\right)} =$$

$$= \frac{2\,tg(x)}{\sin\left(\sqrt{\ }+\sqrt{\ }\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,tgx}{2\sin x} = \text{[redacted]}$$

↓ mandiamo $x\to 0$, $tgx\to 0$

$$= \lim \frac{\sin}{\cos} \cdot \frac{1}{\sin} = 1$$

Quindi possiamo notare che $\sin x \overset{x\to 1}{\sim} tgx$.

Esercizio

Quindi possiamo notare che $\sin x \sim tg\, x$.

Esercizio

FI: $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1+x^2}-1}{x} = \frac{\sqrt{x+1+x^2}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1+x^2}+1}{\sqrt{x+1+x^2}+1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+1+x^2}\right)^2 - 1}{x\left(\sqrt{x+1+x^2}+1\right)} = \frac{x+1+x^2-1}{x\left(\sqrt{x+1+x^2}+1\right)} = \frac{x^2+x}{x\left(\sqrt{x+1+x^2}+1\right)} =$$

$$= \frac{x(x+1)}{x\left(\sqrt{x+1+x^2}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

Si può notare che in questo esempio il confronto di velocità non avviene più di fronte.

Esercizio

FI $+\infty$
$-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - x =$$

$a-b \cdot a+b$ non elimina la radice cubica, mi serve qualcosa del tipo $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} - x \cdot \frac{\left[\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3+x^2} + x^2\right]}{\left[\quad\quad\right]} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^3 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+x^2} + x^2} = \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

Questi tre addendi si comportano, all'infinito, come x^2. Non è un passaggio algebrico, ma al limite.

Esercizio

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+x+x^2}{x^2}\right) \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+1} = 1$$

$\operatorname{sen}^2 x$: oscilla tra 0 e 1

$\left(\frac{1+x+x^2}{x^2}\right)$: tende a 1

$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x+1}$: tende a ∞

tende a 1

tende a ∞

Esercizio

$$a_n = (-1)^n \left(\sqrt{n^5+2n+1} - \sqrt{n^5+1} \right) \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

1) trovare $\lim_{n\to\infty} a_n$

2) studiare quando $\{n^x a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in \mathbb{R}$ trovare max lim e min lim.

Calcoliamo il limite:

- $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \to \cos(0) \to 1$
- $\sqrt{n^5+2n+1} - \sqrt{n^5+1} \to$ F.I. $+\infty - \infty$

Risolviamo la forma indeterminata, razionalizzando

$$\sqrt{n^5+2n+1} - \sqrt{n^5+1} \cdot \frac{\sqrt{n^5+2n+1} + \sqrt{n^5+1}}{\sqrt{n^5+2n+1} + \sqrt{n^5+1}}$$

$$\cong \frac{n^5+2n+1-n^5-1}{\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad}} \cong \frac{2n}{\sqrt{n^5+2n+1} + \sqrt{n^5+1}} \cong 0$$

- den $\cong 2n^{5/2}$, quindi è più veloce di $2n$

Parte (2)

Riscriviamo il limite tramite l'approssimazione trovata:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(\frac{2n}{2n^{\frac{5}{2}}} \right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n^{\frac{5}{2}}} \right) n^x = \lim_{n\to\infty} (-1) \cdot n^{1-\frac{5}{2}} \cdot n^x = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \, n^{x-\frac{3}{2}} = 0$$

- $x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow$ se $x = \frac{3}{2} \rightarrow \lim_{n\to\infty} (-1)^n$ = indeterminata ma non limitata (oscilla tra -1 e $+1$)
- $x - \frac{3}{2} > 0 \rightarrow$ se $x > \frac{3}{2} \rightarrow$ indeterminata non limitata
- $x - \frac{3}{2} < 0 \rightarrow$ se $x < \frac{3}{2} \rightarrow (-1)^n \cdot 0 = 0 \rightarrow$ converge.

Ricorso max lim e min lim.

Esercizio

$a_n = (-1)^n \sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

1) $\lim_{n\to\infty} a_n$

$a_n = (-1)^n \sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

1) $\lim_{n\to\infty} a_n$

2) $(1 + a_n)^{n^x} \quad x \in \mathbb{R}.$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) \simeq \left(\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \simeq \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \simeq$$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = 0$$

Parte (2)

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)\right]^{n^x} = ?$$ dipende da come va ad infinito FI

Riconduciamo al limite notevole neperiano...

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{\frac{1}{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)}}\right]^{n^x} = \left[\ \ //\ \ \right]^{n^x \frac{1}{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)}} \quad (-1)\sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{(-1)^n \frac{1}{2} \cdot n^x \cdot \sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)}$$

Studio il limite dell'esp.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n^x \cdot \sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n n^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} =$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \cong \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \text{per } n\to\infty}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2} n^{x-\frac{1}{2}}$$

Ora tutto dipende da x:

Ricordo maxlim e minlim.

- $x - \frac{1}{2} = 0 \to x = \frac{1}{2} \to \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2} n^0 =$ indeterminato, oscilla tra $\pm\frac{1}{2}$

- $x - \frac{1}{2} > 0 \to x > \frac{1}{2} \to$ lim indeterminato ma limitato

- $x - \frac{1}{2} < 0 \to x < \frac{1}{2} \to$ lim tende a 0 → converge.

Ora ripetiamo tutto all'esponente:

- $x = \frac{1}{2} \to e^{\frac{(-1)^n}{2}}$ oscilla tra $e^{\frac{1}{2}}$ e $e^{-\frac{1}{2}}$

Ora ripartiamo tutto all'esponente:

- $x = \frac{1}{2} \to e^{\frac{(-1)^n}{2}}$ oscilla tra $e^{\frac{1}{2}}$ e $e^{-\frac{1}{2}}$
  ↑ max lim ↑ min lim

- $x > \frac{1}{2} \to e^{\frac{(-1)^n}{2} \cdot +\infty}$ oscilla tra e^{∞} e $e^{-\infty}$
  ↓ ∞ ↓ 0

- $x < \frac{1}{2} \to e^{0} \to 1$ convergente

Derivata

$$f: X \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in X, \ h \in \mathbb{R} \mid x_0 + h \in X$$

Studiamo il rapporto incrementale di f in x_0:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Tale misurazione può essere effettuata in qualunque funzione, purché definita in x_0 ed in x_0+h. Non è necessario che sia continua o derivabile o altro.

Può essere fatto per qualunque funzione.

Mi chiedo cosa succeda per $h \to 0$, quindi studio il limite del rapporto incrementale.

Se $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$ esiste, e lo chiamo derivata di f.

$f'(x_0)$ è un numero.

$\lim_{h \to 0}$ h

$f'(x_0)$ è un numero.

Si denota anche come $\frac{df}{dx}$.

Definizione

Presa una funzione $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, $h \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 + h \in X$. Se esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ per $h \to 0$, allora dico che f è derivabile in x_0 e chiamo tale numero derivata di f in x_0 e lo denoto come $f'(x_0)$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$$

La derivata nasce da una necessità applicativa relativa alla misura di variazioni di grandezze.

velocità

$$V_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}, \quad V_{ist} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Può essere fatto per qualunque funzione.

accelerazione

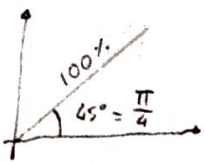
$$a_m = \frac{V(t) - V(t_0)}{t - t_0} \qquad a_{ist} = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

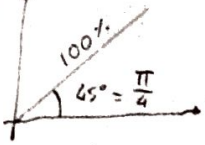
densità

$$\rho_m = \frac{m(V) - m(V_0)}{V - V_0}$$

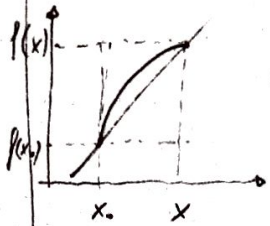
pendenza

$$\frac{h(s) - h(s_0)}{s - s_0}$$





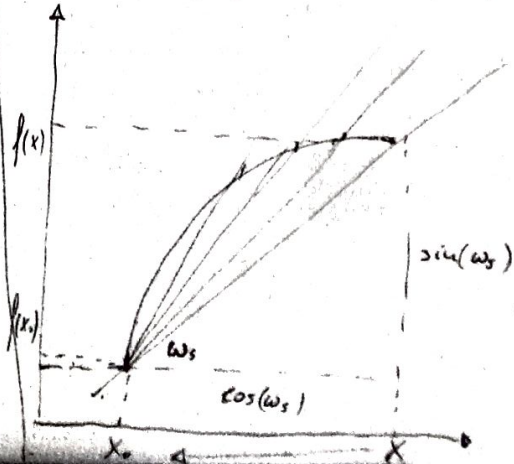
Motivazione Geometrica



$$m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Il rapporto incrementale misura quindi: il coefficiente angolare della retta (secante) che attraversa i punti (x, y) e (x_0, y_0).



Al tendere di x ad x_0 la secante tende a diventare la tangente alla curva nel punto x_0.

$$m_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(!) Errore classico: cosa rappresenta la derivata? La tangente! No!

Sì: il coefficiente angolare della tangente alla curva nel punto x_0.

Sia ω_s... l'angolo che la secante forma con l'asse x,

~~denominato ω_s~~

allora

$$m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin(\omega_s)}{\cos(\omega_s)} = tg(\omega_s)$$

$$m_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin(\omega_t)}{\cos(\omega_t)} = tg(\omega_t)$$

Quindi un'altra formulazione di derivata è quella

ω_s = angolo con la sec.

ω_t = angolo con la tang

$m_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin(\omega_t)}{\cos(\omega_t)} = f(\omega_t)$

Quindi un'altra formulazione di derivata è quella di considerarla la tangente trigonometrica dell'angolo ω_t.

Se una funzione è derivabile in un punto, significa che in tale punto la tangente esiste.

Se f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0.

Teorema

Derivabilità in $x_0 \Rightarrow$ continuità in x_0

Dimostrazione

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$? cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$.

Consideriamo $f(x) - f(x_0) \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$

$\lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \to f'(x_0) \cdot 0 = 0.$

Per ipotesi $f'(x) \in \mathbb{R}$.

w_s = angolo con la sec.

w_t = angolo con la tangente

Non è detto però che se una funzione sia continua in x_0, abbia anche derivata in x_0.

<u>Controesempio</u> ($\not\Leftarrow$)

$f(x) = |x|$

$|x|$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ ma non è derivabile nell'origine.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases} \quad \nexists \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

quindi non esiste $f'(0)$ per $|x|$.

$$\exists f'_+ \neq f'_-$$

(!) Non dire che "Una funzione derivabile è continua"... Derivabile $\Rightarrow$ continua

$\exists f'_+ \neq f'_-$

(!) Non dire che "Una funzione derivabile è continua"... Derivabile $\Rightarrow$ continua (se i punti sono gli stessi).

Teorema

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \iff \exists f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definizione:
Derivabilità sul dominio

f è derivabile su X se lo è $\forall x \in X$

Esempio

$f = \text{const} = c$ sono sempre derivabili.

Infatti $\frac{c-c}{x-x_0} = 0$ (ancora prima di fare il lim...

Esempio

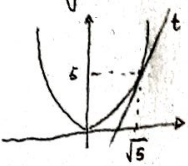
$f(x) = x \quad \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$ Cioè trovare il coeff. angolare della bisettrice.

Esempio

$y = x^2$ [redacted] $\dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \dfrac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}}$

$\lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$ $\qquad (x^2)' = 2x$

Abbiamo ottenuto una nuova funzione, lasciando x_0 non assegnato.



$m_t = 2 \cdot \sqrt{5}$

$y - y_0 = m_t (x - x_0)$

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$\downarrow$

$r_t = y - 5 = 2\sqrt{5}(x - \sqrt{5}) \to y = 2\sqrt{5}x - 5$

~~Esempio~~ Derivata di x^n

$f(x) = (x^n)' \to (x^n)' = nx^{n-1}$ $\qquad n \in \mathbb{N}$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k\right) - x^n}{h} =$$

$x^n \; x^n + (\;) x^{n-1} h + (\;) x^{n-2} h^2 + \dots + h^n$

Binomio ...
Newton

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k\right) - x^n}{h} =$$

$$= \frac{x^n - x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n}{h} = \frac{n\cdot x^{n-1}\cdot h}{h} = nx^{n-1}$$

Derivata di $\sin(x)$

$f(x) = \sin(x) \qquad f'(x) = \cos(x)$

$$\frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \frac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0}$$

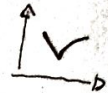
$$\lim_{x\to x_0} \frac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0} = 1 \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{\cos\left(\frac{2x_0}{2}\right)}{x-x_0} = \cos(x_0)$$

Non derivabilità

1) ~~$\exists$~~ $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ * con x_0 punto di non derivabilità.

2) f (r. angolosi) sia continua in x_0, ma

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h+x)-f(x)}{h} \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h+x)-f(x)}{h}$$

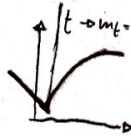


e quindi $f'_+(x) \neq f'_-(x)$

— oppure —

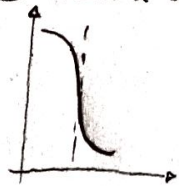
f continua ma coeff. angolare

infinito

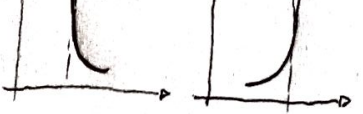


detti "punti angolosi".

3) Punti a t verticale

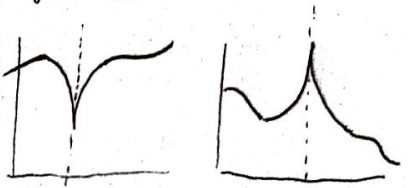


Binomio di Newton



$m_{f-} = -\infty$ $\quad$ $m_{f+} = +\infty$

4) $f'_+ = +\infty$ $\quad$ (p. di cuspide).
$f'_- = -\infty$ ° viceversa



Di certo 2, 3, 4 non si trovano ai confini del dominio. Quando si calcola la derivata, i punti che la rendono non definita, sono ottimi candidati per trovare situazioni di questo tipo.

2) se $m_{f-} \neq m_{f+}$ → p. angoloso
3) se $m_{f+} = m_{f-} = \pm\infty$ → p. a t. verticali
4) se $m_{f+} = \pm\infty \wedge m_{f-} \neq \infty$ → p. cuspide

Tuttavia 2, 3 e 4 necessitano che la f sia continua.

Quindi si chiamano p. di non derivabilità, solo i casi 2, 3, 4!

Algebra Derivate

1) $(cf)' = cf'$

2) $(f \pm g)' = f' + g'$

3) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$, $g \neq 0$

Dimostrazione

1) caso particolare di (2)

2) sia $w = f+g \rightarrow \frac{w(x+h) - w(x)}{h} = \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} =$

$= \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$

$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \rightarrow f'(x) + g'(x)$

$\frac{w(x+h) - w(x)}{h} = \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h}$

Nel compito queste cose valgono meno, quindi conviene farle se sono semplici o se si ha tempo

Es 1 → 1,5 pt.

In sezion

$f(x+h)$

$= f(x+h)$

$= g(x)[f($

$\xrightarrow{h \to 0} g($

$= \frac{gf' - f}{g^2}$

Ricorda:

e tolto f

La 1) usa

$c' = 0$, qu

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \longrightarrow f'(x)+g'(x)$

③ $w = fg \longrightarrow \frac{w(x+h)-w(x)}{h} = \frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} =$

$= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$

$= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \pm f(x)g(x)}{h} =$

$= \frac{g(x+h)[f(x+h)-f(x)]}{h} + \frac{f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{h\to 0}{\longrightarrow} g(x+0)f'(x)+f(x)g'(x)$

Tuttavia $g(x+h) \xrightarrow{h\to 0} g(x)$ solo se g è continua.
Ma poiché g è derivabile è anche continua, e
Quindi diventa $g(x)f'(x)+f(x)g'(x)$.

④ $w = \frac{f}{g} \longrightarrow w(x+h)-w(x)$.
Per semplicità svolgiamo separatamente il denominatore:

$\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x)}{g(x+h)g(x)}$

La D as
$c'=0$, g

Consider
derivabil

Sia C^k
funzioni
derivate
$C^\infty(x)$
derivabi

$C^\circ \supset$

Esemp
$(\operatorname{tg} x)$

$\cos x$

Ricor

Inseriamo il denominatore:

$$\frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)g(x)} = \text{Aggiungiamo e togliamo...}$$

$$= \frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x) \pm f(x)g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)g(x)} =$$

$$= \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h} - \frac{f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)g(x)} \to$$

$$\xrightarrow{h \to 0} g(x)f'(x) - f(x)g'(x) \cdot \frac{1}{g(x) \cdot g(x)} =$$

$$= \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Ricorda: in 3) e 4) abbiamo aggiunto e tolto $f(x)g(x)$ per raccogliere i fattori.

La 1) usa il prodotto, quindi $cf' + c'f$ ma $c' = 0$, quindi $(cf)' = cf'$.

La 3 usa il prodotto, quindi $cf' + c'f$ ma $c' = 0$, quindi $(cf)' = cf'$.

Considerando 1) e 2) $\Rightarrow af + bg$ è ancora derivabile. $(af+bg)' = af' + bg'$.

Sia $C^k(X)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni derivabili k volte in X e la cui derivata ~~sia continua~~ k-esima continua.

$C^\infty(X)$ è lo sp. vec. delle fun. infinitamente derivabili.

$$C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \dots \supset C^\infty$$

Esempio

$$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Ricorda che $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Esempio

$$(\cot g\, x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Esempio

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Non si può dimostrare con il binomio di Newton, come avevamo fatto nel caso $\alpha \in \mathbb{N}$.

$$\frac{(x+h)^\alpha - (x)^\alpha}{h} = \frac{x^\alpha\left[\left(\frac{x+h}{x}\right)^\alpha - 1\right]}{h} =$$

$$= \frac{x^\alpha\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1\right]}{h}.$$ Studiamo il limite, lasciando fuori x^α, che non dipende da h.

Lim. Notevole

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}\cdot x} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\left[\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}}\right]$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{\ }{x}\right)}{\frac{h}{x}\cdot x} = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0}\left[\frac{\left(\frac{\ }{x}\right)}{\frac{h}{x}}\right]$$

$$\frac{h}{x} := y \to \frac{(1+y)^{\alpha}-1}{y} \;;$$

$$(1+y)^{\alpha} := z \to (1+y)^{\alpha} = 1+z \to$$

$$\to \ln\left[(1+y)^{\alpha}\right] = \ln\left[(1+z)\right] \to \alpha \ln\left[(1+y)\right] = \ln(1+z)$$

Molt e div per $\ln(1+z)$...

$$\frac{z}{\ln(1+z)} \cdot \frac{\ln(1+z)}{y} = \frac{z}{\ln(1+z)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+y)}{y}$$

Se $h \to 0$, $y \to 0$ e $z \to 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1 \qquad \lim_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1$$

Quindi per $h \to 0$ $= \alpha$

Quindi risulta $\alpha \frac{x^{\alpha}}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$

Lim. Notevole

Esem

$y = b$

$(\log_a($

$\log$

$\lim_{h\to 0}$

$= \frac{1}{x}$

Se

Esempio

$y = a^x$

$(a^x)' = a^x \ln e$

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

Sost. variabile: $a^h - 1 = z \to a^h = 1 + z$

$$\log_a(a^h) = \log_a(1+z)$$

$$h \log_a(a) = \log_a(1+z)$$

$$h = \log_a(1+z)$$

$$\frac{a^x \cdot z}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot z}{\log_a(1+z)}, \text{ per } h \to 0,\ z \to 0$$

Ritrovo

$$\lim_{z \to 0} \frac{a^x \cdot z}{\log_a(1+z)} = a^x \cdot \ln(a)$$

Se $a = e \to e^x \cdot \ln e = e^x$

Esempio

$y = \log_a(x)$

Esempio

$y = \log_a(x)$

$$\left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{x \ln(a)}$$

$$\frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} =$$

Sost. variabile: $y = \frac{h}{x}$, $h \to 0$, $y \to 0$

Lim. Notevole

$$= \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(1+y)}{y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$$

Se $a = e \to \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{x}$

Analisi (51) – (52) back

$$D(f) = f', \qquad D: C^1(X) \longrightarrow C^0(X)$$
$$f(x) \longmapsto f'(x)$$

Funzioni diverse possono avere la stessa derivata.

D è una funzione che associa funzioni derivabili a funzioni continue.

D non è iniettiva nè suriettiva, quindi non è invertibile. Questo sarà un problema quando andremo a studiare gli integrali, poichè tale studio passa per la ricerca di una funzione che derivata dia la funzione data.

funzione data.

Definizione Primitive

$F(x)$ si dice primitive di $f(x)$,
se $F'(x) = f(x)$

$g \circ f = g(f)$

Esistono infinite primitive per ogni funzione, quindi possiamo trovare <u>una</u> primitive o una famiglia di primitive.
Infinità non numerabile.

Esempio

$F'(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + c$

Derivata di Funzione Composta.

Teorema

Premessa

Prendo $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile. Poiché è derivabile, $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$.

Probabilmente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon(h)$.

Dove $\varepsilon(h)$ è una fun. dipendente da h e di cui so che per $h\to 0$, $\varepsilon(h)\to 0$.

$\varepsilon(h)$ misura l'errore che commetto sostituendo la derivata col rapporto incrementale.

Posso inoltre dire che $\varepsilon(0)=0$, quindi richiedo che sia continua in 0.

Enunciato

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e $g:(c,d)\to\mathbb{R}$.

Enunciato

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e $g:(c,d)\to\mathbb{R}$.

$\mathrm{Im}_f \subseteq (c,d)$. f e g sono derivabili ciascuna nel proprio dominio.

$g\circ f = g(f)$

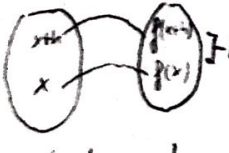
Allora $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$.

Dimostrazione

$$\frac{g(y+k)-g(y)}{k} = \qquad (a,b)\to(c,d)\to\mathbb{R}$$

$$x \longmapsto y=f(x) \longmapsto$$

$$= \blacksquare\, g'(y)+\varepsilon(k)$$



Quindi $f(x+h)-f(x)=k$.

Quando $h\to 0$, $k\to 0$ ma non è automatico, lo sappiamo perché f è una fun continua, altrimenti non sarebbe vero.

Analisi (52) → (53) on back

$\varepsilon(k) \xrightarrow{h \to 0} 0$

Inoltre $\frac{k}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \to 0} f'$

Ho quindi scoperto che:

- $\varepsilon(k) \xrightarrow{h \to 0} 0$
- $\frac{k}{n} \xrightarrow{h \to 0} f'$

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \frac{g\left(f(x) + f(x+h) - f(x)\right) - g\left(f(x)\right)}{k} \Rightarrow$$

⚠ Errore Grave ☞

$g'\left(f(x)\right) + \varepsilon(k) \Rightarrow$

$\Rightarrow g\left(f(x+h)\right) - g\left(f(x)\right) = k g'\left(f(x)\right) + k\varepsilon(k) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{g\left(f(x+h)\right) - g\left(f(x)\right)}{h} = \frac{k g'\left(f(x)\right) + k\varepsilon(k)}{h} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim \frac{g\left(f(x+h)\right) - g\left(f(x)\right)}{h} = \lim \frac{k}{h} g'\left(f(x)\right) + \frac{k}{h}\varepsilon(k)$

h $\qquad$ h

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k}{h} g'(f(x)) + \frac{k}{h}\epsilon(k)$$

Sul primo membro non sappiamo nulla, quindi sfruttiamo il secondo membro

$$\Downarrow$$

$$f'(x)g'(f(x)) + f(x)\cdot 0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)g'(f(x))$$

Errore frequente:

Usare il primo membro per ottenere informazioni negli ultimi passaggi. Sul primo membro non possiamo dire nulla sinché non siamo a conoscenza del risultato al secondo membro.

$\epsilon(h)$ continua in 0 serve per evitare problemi nel caso in cui $h=0$.

Indago una cosa che non conosco studiando una che conosco.

Esempio

$f(x) = \ln(\sin^2 x)$

$f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot (\sin^2 x)' = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cdot (\sin x)'$

$= \frac{1}{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \frac{\cos x}{\sin x}$

Esempio

$f(x) = e^{2x}$

$(e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$ ✓

Errore Grave

Errori comuni:

- e^{2x} NO
- $2e^{2x-1}$ NO
- e^2 NO

Esempio

$(x^x)'$

Non possiamo usare né la derivata di esp. né quella di pow.

$(x^x)'$

Non possiamo usare né la derivata di esp. né quella di pow.

$x^x = e^{\ln(x)^x} = e^{x \cdot \ln(x)} \rightarrow$

$(x^x)' = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot (x \ln x)' =$ [illegible]

$= e^{x \ln(x)} \cdot \ln x + \frac{x}{x} = e^{x \ln x} \left(\ln(x) + 1 \right)$

Indago una cosa che non conosco studiando una che conosco.

Derivata di funz. inversa

$f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad y = f(x)$

1) f derivabile in $x_0 \in (a,b)$
2) f strettamente monotona

allora - $g = f^{-1}$ è derivabile

$$- g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

Poiché $g(y_0) = x_0$ e $g(y) = x$, quindi riscriviamo tutto...

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Si nota che è l'inverso algebrico del rapporto incremento di f. Vediamo al limite,

$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$ algebrico del rapporto incrementale di f. Vediamo al limite, che esista e sia finito

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Non siamo entrati a fare ipotesi sul primo membro.

Quando $y \to y_0$, poiché g' è l'inversa di una funzione f continua e monotona, anche g è continua, quindi per $y \to y_0$, $g(y) \to g(y_0)$ ma allora $x \to x_0$. Riscriviamo...

Non è ovvio, bisogna fare questa considerazione.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

Diffe

Conce

Se f

scriver

$f(x+h$

Ma

$f(x+$

Risc

Δf

$f(h)$.

Punto

h li

Esempio

$$(\arcsen(y))' = \frac{1}{(\sen(x))'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} =$$

$y = \sen(x)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Esempio

$$(\arccos(y))' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Esempio

$$(\arctg(y))' = \frac{1}{(\tg(x))'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} =$$

$y = \tg(x)$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\tg^2(x)} =$$

$$= \frac{1}{y^2}$$

$$= \frac{1}{y^2}$$

Differenziabilità

Non siamo autorizzati a fare inferenze sul primo membro.

Concetto legato a derivabilità.

Se f è derivabile in x allora posso scrivere $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon(h)$

Non è ovvio, bisogna fare questa considerazione.

$$f(x+h) - f(h) = h f'(x) + \varepsilon(h) h$$

Ma $\varepsilon(h) \cdot h$ è un $o(h)$. (o-piccolo)

$$f(x+h) - f(h) = \Delta f.$$

Riscriviamo

$$\Delta f = f'(h) h + o(h)$$

$f'(h) \cdot h$ è detta <u>parte lineare in h.</u>

Parte lineare in h, cioè proporzionale ad h linearmente.

Definizione Differenziale

f si dice differenziabile in x se

$\Delta f = Ah + o(h)$ con $A \in \mathbb{R}$,

e la quantità Ah la chiamiamo differenziale di f in x.

Denotiamo $Ah = df$.

Osservazione

Per le funzioni derivabili $f'(x) = A$. Quindi tutte le funzioni differenziabili sono derivabili.

Osservazione

Le funzioni [redacted] derivabili sono anche differenziabili

$\lim \frac{\Delta f}{\quad} = \lim \frac{Ah}{\quad} + \lim o(h)$

Esem

$\int f(x) \cdot d$

Il differ
essere
La curv
$\Delta f = f'($
$df = f'($

Il differ
il combi

Esempi

$dy = d$

differenziabili

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{A\cancel{h}}{\cancel{h}} + \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h}$$

$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ tende a 0 per def. o-piccolo.

Quindi $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} = A \Rightarrow f'(x) = A$

Non è vero in generale, ma solo per funzioni in una variabile.

Esempio

$df = f'(x) \cdot h$

Se $f(x) = x \Rightarrow df = 1 \cdot h = h$

$$dx = h$$

dx è il differenziale della variabile dipendente.

Fondamentale

Esempi

$dy =$ d

Teorem

Th. di

$f: (a,b)$

e sia

allora

Quindi

Non

min o

Util

I pu

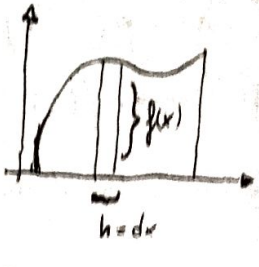
cond

Def

I p

di

Esempio



$$\int f(x) \cdot dx$$

Il differenziale misura la differenza tra essere una curva e la tangente che approssima la curva.

$$\Delta f = f'(x)h + o(h)$$

$$df = f'(x)h + 0$$ l'errore va a zero nell'approssimazione al limite.

Il differenziale lo useremo quando farò il cambio di variabile negli integrali.

Esempio

$$dy = d[f(x)] = f'(x) \cdot dx$$

Esempio

$dy = d[f(x)] = f'(x) \cdot dx$

Teoremi sulle derivate

Th. di Fermat

$f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a,b)$

e sia x_0 un punto di estremo (max o min relativo), allora $f'(x_0) = 0$.

Quindi la tangente geometrica nel punto è orizzontale.
Non è vero il contrario, solo che se ho un min o un max allora in tale punto la tangente è orizzontale.
Utile strumento per trovare max e min relativi.
I punti in cui la derivata si annulla sono candidati ad essere massimi e minimi.

Definizione P. Stazionari

I punti in cui la derivata è nulla, si dicono punti stazionari.

Dimostrazione Th. Fermat.

Sia x_0 un punto di max (min) relativo,

cioè $\exists U_{x_0} \mid f(x) \leq f(x_0) \left(f(x) \geq f(x_0)\right) \quad \forall x \in U_{x_0} \cap (a,b)$

Def. max/min rel.

L'intersezione con (a,b) è importante perché la funzione sia definita.

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ Studiamo il segno del rapporto a secondo che io sia a destra o a sinistra del punto x_0.

Sia x_0 un p. di max

Per $x > 0 \xrightarrow[x \to 0^+]{}$ [redacted] rapp. incr. ≤ 0 (num ≥ 0, den ≤ 0)

Per $x < 0 \xrightarrow[x \to 0^-]{}$ rapp. incr. ≥ 0 (num ≥ 0, den ≥ 0)

Per il Th. della permanenza del segno, il limite manterrà i segni. Poiché per ipotesi [redacted] f è derivabile in x_0, allora la derivata destra e quella sinistra sono uguali.

Poiché sono una ≥ 0 e l'altra ≤ 0, [illegible] devono coincidere in 0, quindi

poiché sono una ≥ 0 e l'altra ≤ 0,
allora devono coincidere in 0, quindi

$$f'(x_0) = 0$$

!!! Errore Classico: dire la derivata "del" punto x_0.
è sbagliato! Si dice la derivata "nel" punto x_0.

Osservazione

Th. Fermat è una condizione necessaria ma non sufficiente affinché x_0 sia un punto di max (min).

Controesempio

$y = x^3 \qquad f'(x) = 3x^2 \qquad f'(x) = 0$

$$3x^2 = 0 \text{ se } x = 0$$

Ma in $x=0$ non è né max né min, ma solo p. stazionario.

Teorema di Rolle

Def. max/min rel.

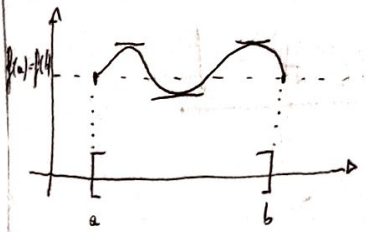
L'intersezione con (a,b) è importante perché la funzione sia definita.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ con

1. f continua in $[a,b]$
2. f derivabile in (a,b)
3. $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists c \in (a,b) \mid f'(c) = 0$

Significato geometrico:



Dimostrazione

Siccome f è continua in $[a,b]$, per il th. di Weierstrass ha max e min.

Diverse possibilità:

1. se $\max f = \min f \to f$ costante $\Rightarrow$

$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Diverse possibilità:

1. se $\max f = \min f \rightarrow f$ costante $\Rightarrow$
$f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

2. se $\max > \min \rightarrow$ almeno uno è un punto interno ad (a,b). Ma allora, per il th. di Fermat $\exists c \mid f'(c) = 0, c \in (a,b)$.

Controlliamo che le ipotesi siano verificate per Fermat.

Questo th. è una condizione sufficiente per garantirmi la tangente orizzontale.
Quindi $\exists$ fun che hanno tangente orizzontale anche senza rispettare le ipotesi!

Esempio

$|x|$ non rispetta la 2. del th. di Rolle, infatti non è derivabile in $f(0)$, ma ha tangente orizzontale in $x = 0$.